العلاقة بين متغيرين

تمهيد :

اشترى طالب من بائع عدد من الاقلام و الكراسات مجموع عددهم ٢٠ و كان عدد الاقلام س و عدد الكراسات ص فإن س + ص = ٢٠ و نلاحظ أنه كلما تغير عدد الاقلام كلما تغير عدد الكراسات ، فيمكن أن يكون عدد الاقلام = ١٠ و عدد الكراسات = ١٠ أى أن : ١٠ + ١٠ = ٢٠ أو عدد الاقلام = ٦ و عدد الكراسات = ١٤ فيكون المجموع ٢٠ أو عدد الاقلام = ١٣ فيكون عدد الكراسات = ٧ و هكذا ٠٠٠٠ ولذلك هناك علاقة بين عدد الاقلام و عدد الكراسات فكلما تغير عدد الاقلام يتغير عدد الكراسات و العكس و علية يقال إن هناك علاقة بين س ، ص (المتغيرين)

الصورة العامة للعلاقة بين س ، ص :
م س + ب ص = جـ ، م { ٠ ، ب } ٠
و تسمى علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص و تمثل بيانيا بخط مستقيم

ملاحظات هامة

١- أى زوج مرتب من الاعداد الحقيقية يحقق العلاقة الخطية (أى يجعل طرفها الايمن = طرفها الايسر) يعتبر حلا للعلاقة.
مثلا : إذا كان (٢ ، ٤) يحقق العلاقة س + ص = ٦ فإن :
الطرف الايمن = ٢ + ٤ = ٦ = الايسر B (٢، ٤) حلا للعلاقة
٢- العلاقة بين متغيرين لها عدد لا نهائى من الازواج المرتبة التى تحقق العلاقة .
٣- لتمثيل العلاقة بين متغيرين بيانيا نأخذ زوجين مرتبين يحققان العلاقة و تمثيلها بنقطتين فى مستوى الاحداثيات ثم نرسم مستقيم يمر بالنقطتين و نوجد زوجا ثالثا للتأكد من صحة التمثيل.
٤- كل نقطة تنتمى للخط المستقيم يمثلها زوج مرتب يحقق العلاقة.

إعداد / خالد المنفلوطى Tell/ 0106522138 Email/elmnfalty26@yahoo.com

٥- إذا كان المستقيم ٱ س + ب ص = جـ ، جـ = ٠ يمر بنقطة الاصل
٦- إذا كانت ٱ = ٠ فإن العلاقة تصبح ب ص = جـ و يمثلها بيانيا مستقيم يوزاى محور السينات .
٧- إذا كانت ب = ٠ فإن العلاقة تصبح ٱ س = جـ و يمثلها بيانيا مستقيم يوزاى محور الصادات .
٨- العلاقة ص = ٠ يمثلها محور السينات.
٩- العلاقة س = ٠ يمثلها محور الصادات.

مثال : أوجد أربعة أزواج مرتبة تحقق العلاقة س + ص = ٥ و مثلها بيانيا

الحل :

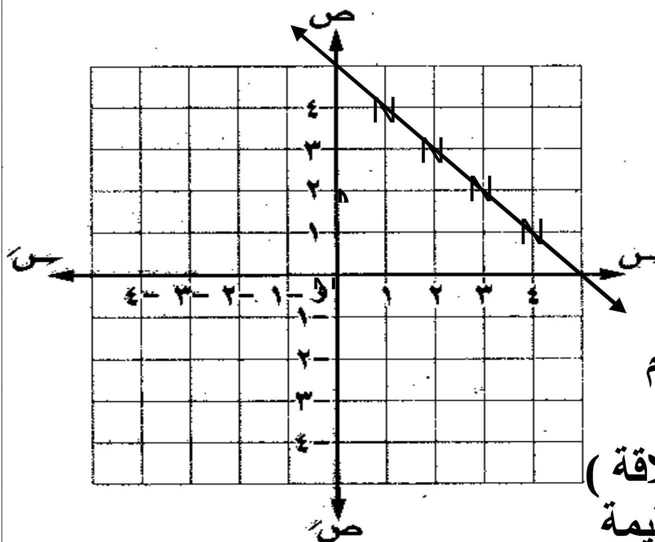
ملحوظة : لسهولة ايجاد الازواج المرتبة التى تحقق العلاقة نجعل س أو ص فى أحد الطرفين و باقى الحدود فى الطرق الآخر لسهولة التعويض

س + ص = ٢ ← ص = ٥ ـ س

عندما س = ١ ← ص = ٥ ـ ١ = ٤ ← (١ ، ٤) يحقق العلاقة
عندما س = ٢ ← ص = ٥ ـ ٢ = ٣ ← (٢ ، ٣) يحقق العلاقة
عندما س = ٣ ← ص = ٥ ـ ٣ = ٢ ← (٣ ، ٢) يحقق العلاقة
عندما س = ٤ ← ص = ٥ ـ ٤ = ١ ← (٤ ، ١) يحقق العلاقة

أو نكون الجدول التالى :

س	١	٢	٣	٤
ص	٤	٣	٢	١



يلاحظ أن : مجموعة الازواج المرتبة التى تحقق العلاقة تنتمى للخط المستقيم

ملحوظة : يمكن إيجاد حلين للمعادلة (العلاقة) بالتعويض عن س = ٠ و نجد قيمة ص و بالتعويض عن ص = ٠ نجد قيمة س

إعداد / خالد المنفلوطى Tell/ 0106522138 Email/elmnfalty26@yahoo.com

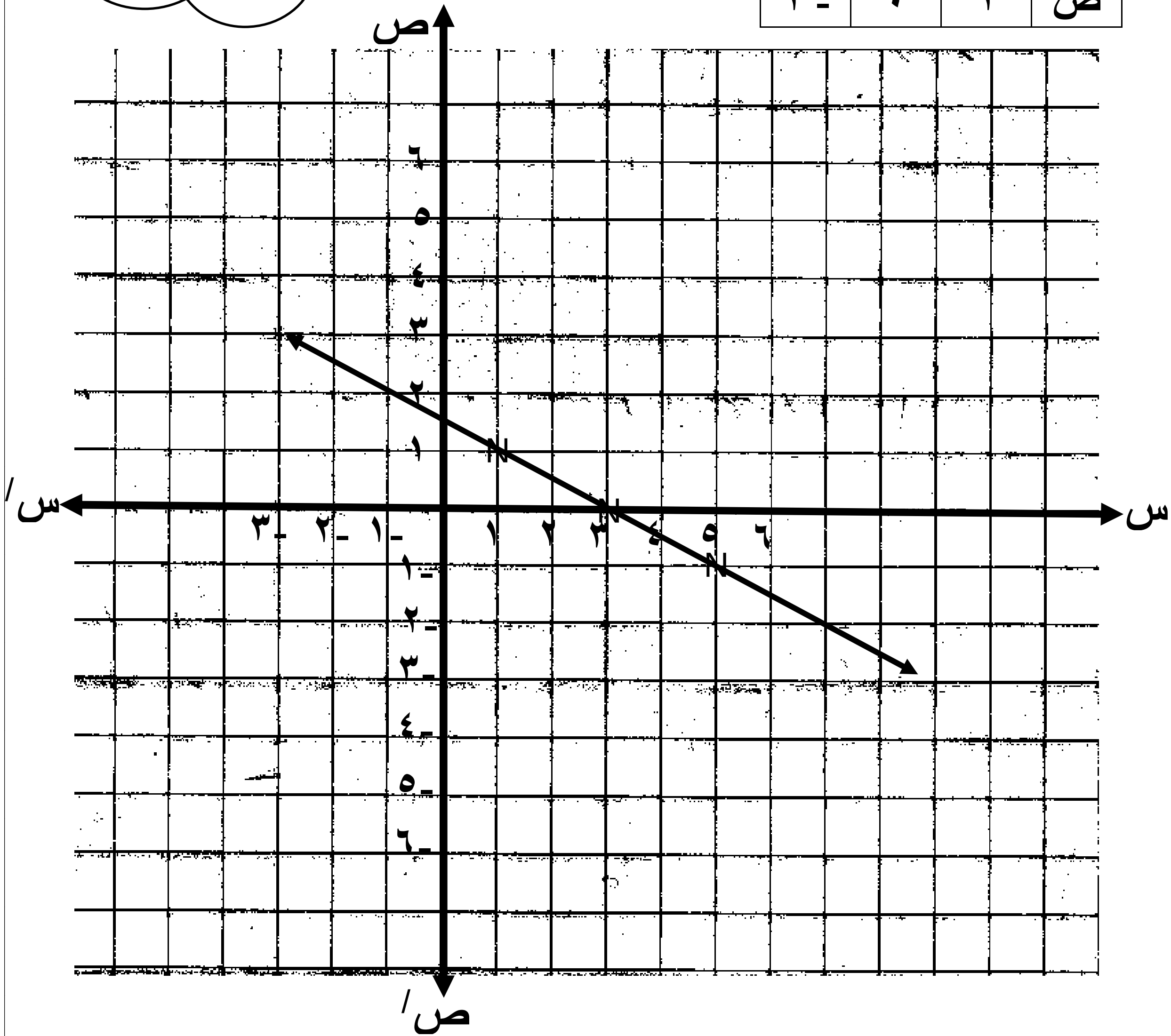
مثال : مثل بيانيا س + ٢ ص = ٣

الحل :

٢ ص = ٣ ـ س B ص = $\frac{٣ ـ س}{٢}$

يفضل اختيار س
بحيث البسط يقبل
القسمة على المقام

س	١	٣	٥
ص	١	٠	١ ـ



مثال : مثل بيانيا المستقيم الذى يمثل العلاقة : ٢ س + ٣ ص = ٦ و إذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ﻫ ويقطع محور الصادات فى النقطة ب ، أوجد مساحة المثلث و ﻫ ب حيث النقطة و هى نقطة الأصل .

الحل :

A ٢ س + ٣ ص = ٦ B ٢ س = ٦ ـ ٣ ص B س = $\frac{٦ ـ ٣ ص}{٢}$

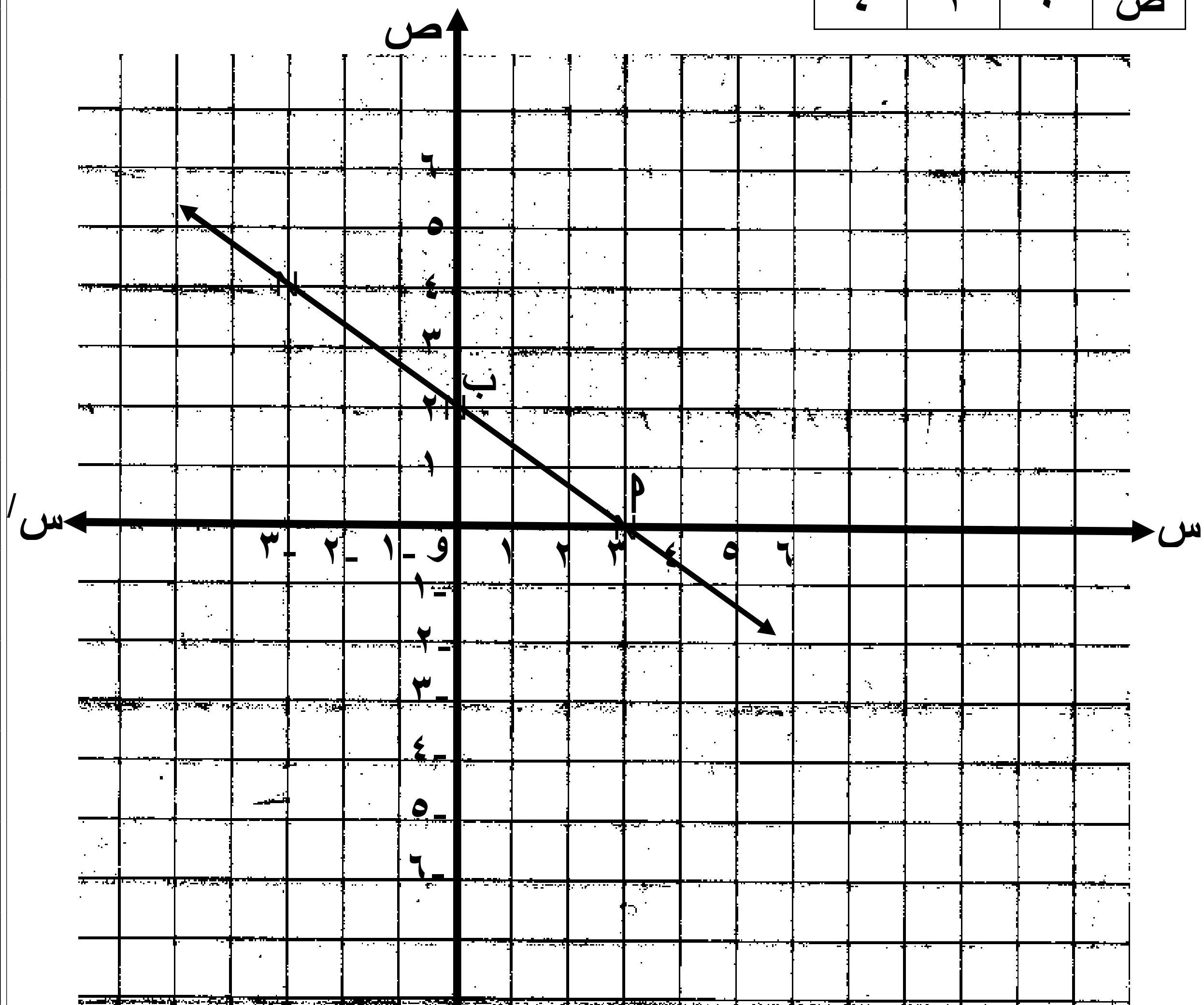
إعداد / خالد المنفلوطى Tell/ 0106522138 Email/elmnfalty26@yahoo.com

بوضع ص = ٠ B س = $\frac{٦ - ٣ \times ٠}{٢}$ = ٣ B (٣ ، ٠) يحقق العلاقة

بوضع ص = ٢ B س = $\frac{٦ - ٣ \times ٢}{٢}$ = صفر B (٠ ، ٢) يحقق العلاقة

بوضع ص = ٤ B س = $\frac{٦ - ٣ \times ٤}{٢}$ = - ٣ B (- ٣ ، ٤) يحقق العلاقة

س	٣	٠	ـ٣
ص	٠	٢	٤



A المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة (٣ ، ٠)

B و ٯ = ٣ وحدات

A المستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٢) B و ب = ٢ وحدة طول

B مساحة Δ و ٯ ب = $\frac{١}{٢}$ و ٯ × و ب = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٢ = ٣ وحدات مربعة

إعداد / خالد المنفلوطى Tell/ 0106522138 Email/elmnfalty26@yahoo.com

ملاحظة

يمكن إيجاد نقطتى تقاطع المستقيم مع محورى الاحداثيات دون الاستعانة بالرسم البيانى بوضع ص = ٠ نحصل على نقطة التقاطع مع محور السينات.
و بوضع س = ٠ نحصل على نقطة التقاطع مع محور الصادات.

مثال : إذا كان ثمن طاولة الكمبيوتر ١٠٠ جنية و ثمن الكرسى ٥٠ جنيها ، فإذا باع المتجر فى أحد الاسابيع بمبلغ ٥٠٠ جنية ، فما هى التوقعات الممثلة لعدد الطاولات التى باعها ، و عدد الكراسى ؟ مثل هذه العلاقة بيانيا .

الحل :

نفرض أن المتجر باع فى الاسبوع عدد س طاولة كميوتر ، ص كرسى
B ١٠٠ س + ٥٠ ص = ٥٠٠
حيث س ، ص إعداد طبيعية B ٢ س + ص = ١٠٠
B ص = ١٠ ـ ٢ س B س لا تزيد عن ٥
B **يمكن رصد التوقعات الممثلة لعدد الطاولات و الكراسى فى الجدول التالى :**

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص	١٠	٨	٦	٤	٢	٠

نكمل بالتمثيل البيانى ....

مثال : إذا كان (ـ ٣ ، ٢) يحقق العلاقة ٣ س + ب ص = ١ فأوجد قيمة ب

الحل :

A (ـ ٣ ، ٢) يحقق العلاقة ٣ س + ب ص = ١
B ٣ (ـ ٣) + ب (٢) = ١ B – ٩ + ٢ ب = ١
B ٢ب = ١ + ٩ B ٢ ب = ١٠ B ب = ٥

مثال: إذا كان (ل ، ٢ ل) يحقق العلاقة س + ص = ١٥ فأوجد قيمة ل

الحل :

A (ل ، ٢ ل) يحقق العلاقة س + ص = ١٥
B ل + ٢ل = ١٥ B ٣ ل = ١٥ B ل = ٥

إعداد / خالد المنفلوطى Tell/ 0106522138 Email/elmnfalty26@yahoo.com

تمارين على العلاقة بين متغيرين

[١] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : (٢ ، −٥) يحقق العلاقة : ٣ س − ص + حـ = ٠ فإن : حـ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ١١ (د) −١١

② أى الازواج المرتبة التالية يحقق العلاقة : ٢ س + ص = ٥

(أ) (−١ ، ٣) (ب) (١ ، ٣) (جـ) (٣ ، ١) (د) (٢ ، ٢)

③ (٣ ، ٢) لا يحقق العلاقة ....

(أ) ص + س = ٥ (ب) ٣ ص − س = ٣

(جـ) ص + س = ٧ (د) س − ص = ١

④ النقطة (٣ ، ٥) تقع على المستقيم الذى يمثل العلاقة ....

(أ) ص = ٣ س − ٥ (ب) ٢ س − ص = ١

(جـ) ٣ س + ص = ١ (د) ص = ٣ س − ١

⑤ إذا كان (−١ ، ٥) يحقق العلاقة : ٣ س + ك ص = ٧ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) ١٠

---

[٢] إذا كان : (٣ ، ٦) يحقق العلاقة ص = ك س **فأوجد قيمة : ك**

---

[٣] إذا كان : (٣ ، ١) يحقق العلاقة ص − ٣ س = أ **فأوجد قيمة : أ**

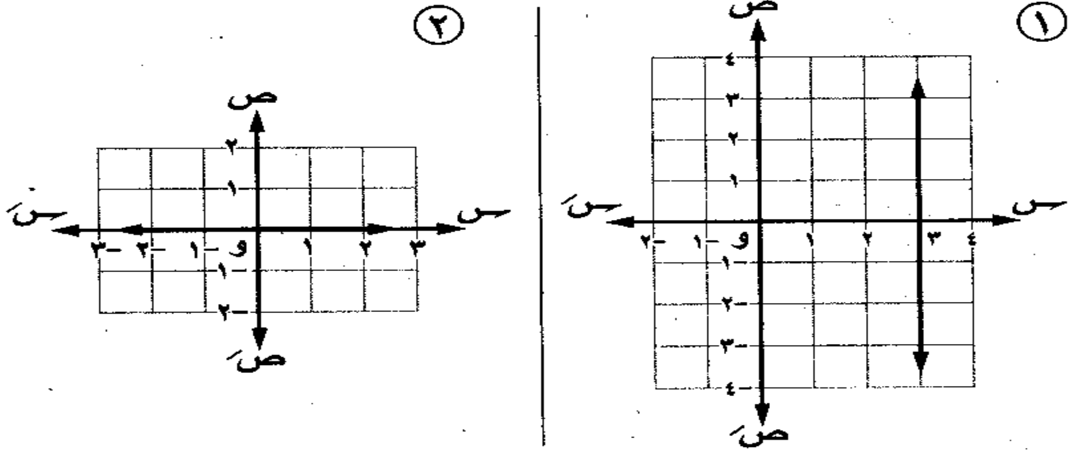
---

[٤] مثل بيانيًا كلاً من العلاقات الآتية :

① س + ص = ٢
② س − ص = ٣
③ س + ٢ ص = ٣
④ ص − ٣ س = ١
⑤ ص = −٢ س
⑥ ص − ٢ س = −١
⑦ ٢ س = ٥
⑧ ص + ١ = ٠

إعداد / خالد المنفلوطى Tell/ 0106522138 Email/elmnfalty26@yahoo.com

[٥] أوجد العلاقات التى يمثلها الخط المستقيم فى كل من الشكلين الآتيين :



[٦] مثل بيانيا المستقيم الذى يمثل العلاقة : ٢ س + ص = ٤ و إذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ﻡ ويقطع محور الصادات فى النقطة ب ، أوجد مساحة المثلث و ﻡ ب حيث النقطة و هى نقطة الأصل .

[٧] إذا كانت س + ٣ ص = ٨ والنقطة (١، م) تقع على هذا المستقيم أوجد قيمة م

[٨] أي المعادلات التالية يمثل العلاقة بين س، ص

س	٢	٣	٤	٥
ص	١٠	١٣	١٦	١٩

(١) ص = س + ٥ (٢) ص = س ـ ٥

(٣) ص = $\frac{١}{٣}$ (س + ١) (٤) ص = ٣ س + ٤

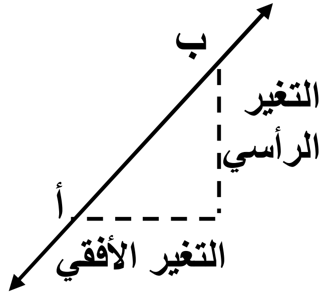
[٩] : بين أي الأزواج الآتية يحقق العلاقة : س + ٢ ص = ٥

[(١، ٢)، (٢، ١)، (ـ ١، ٣)، (ـ ٢، ٤)، (ـ ٣، ٤)، (٥ ، ٠)]

إعداد / خالد المنفلوطى Tell/ 0106522138 Email/elmnfalty26@yahoo.com

الخط المستقيم وتطبيقات حياتية

ميل الخط المستقيم :



$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$ ، (التغير الأفقي ≠ ٠)

ميل الخط المستقيم باستخدام الإحداثيات

$$\text{ميل الخط المستقيم} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$ ، بشرط $س_٢ - س_١ ≠ ٠$

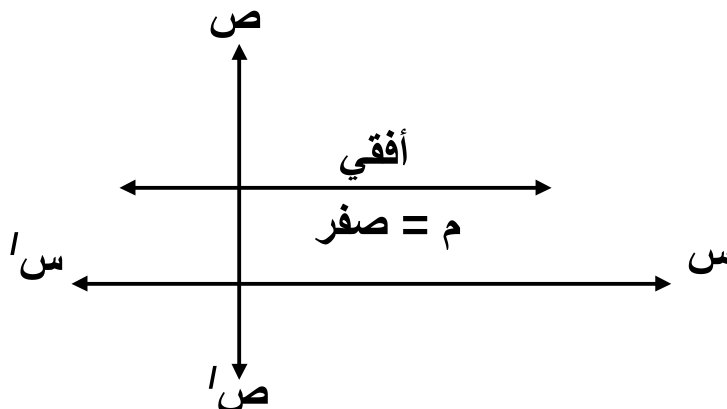
$$= \frac{\text{فرق الإحداثيين الصاديين}}{\text{فرق الإحدثيين السينيين}}$$

فمثلا : المستقيم الذي يمر بالنقطتين (ـ ٤ ، ١) ، (ـ ١ ، ٠)

$$\text{يكون ميله} = \frac{٠ - ١}{-١ - (-٤)} = \frac{٠ - ١}{-١ + ٤} = \frac{-١}{٣}$$

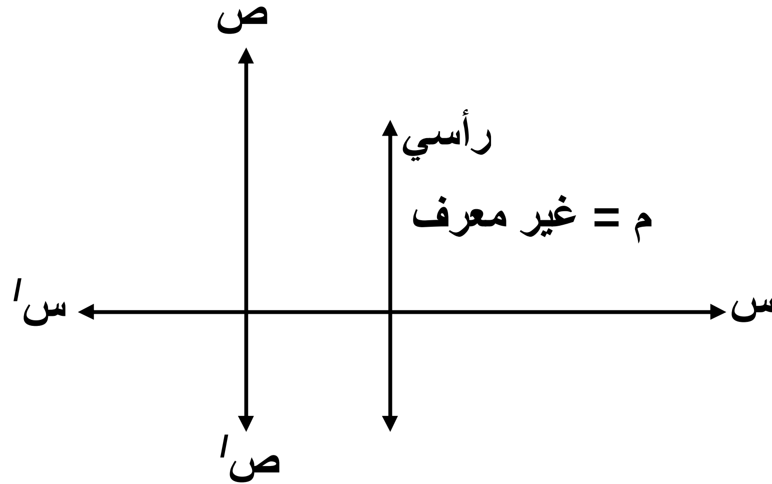
حالات خاصة :

(١) ميل آي مستقيم أفقي (آي موازي لمحور السينات) = صفراً و العكس
إذا كان ميل المستقيم = صفراً كان المستقيم أفقياً

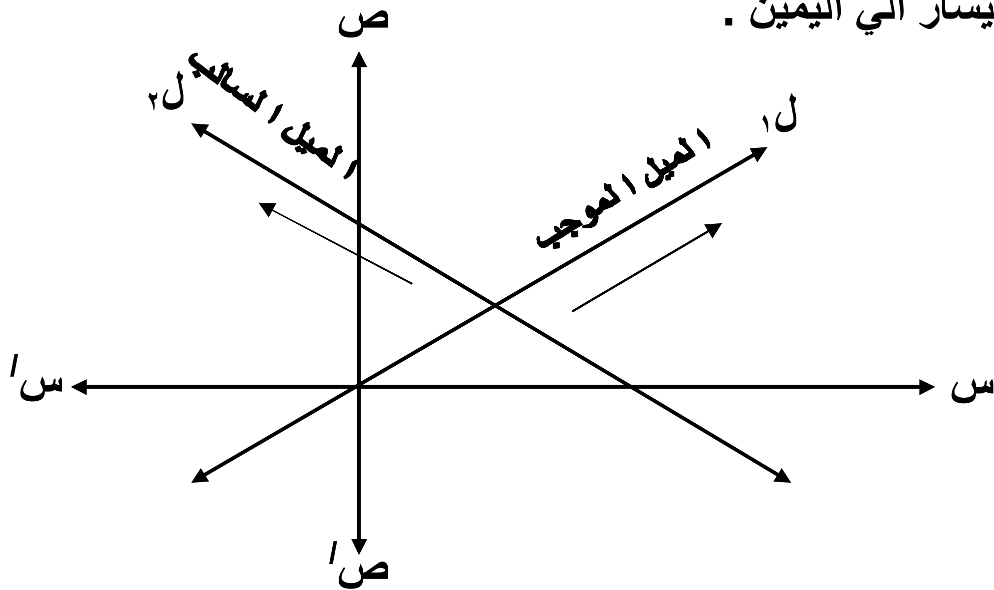


إعداد / خالد المنفلوطى Tell/ 0106522138 Email/elmnfalty26@yahoo.com

(٢) ميل آي مستقيم رأسي (آي موازي لمحور ا لصادات) = غير معرف
و ا لعكس إذا كان ميل مستقيم غير معرف كان المستقيم رأسياً



(٣) إذا كان ميل مستقيم ($ل_1$) موجب فإنه يصعد لأعلي مع حركة نقطة عليه من اليسار ا لي اليمين .
و إذا كان ميل مستقيم ($ل_2$) سالباً فإنه يهبط لأسفل مع حركة نقطة عليه من اليسار الي اليمين .



مثال ١ : إذا كان الخط المستقيم الذي يحوي النقطتين (س ، ـ١) ، (٣، ٢) ميله = ـ $\frac{١}{٢}$ وأوجد قيمة س

ا لحل :

A $م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ B $- \frac{١}{٢} = \frac{٢ - (-١)}{٣ - س}$

B ٣ - + س = ٦ B س = ٩

مثال ٢ : أثبت أن النقط أ (ـ ١ ، ـ ٥) ، ب (٠ ، ـ ٣) ، حـ (٢ ، ١) تنتمي لنفس الخط المستقيم .

ا لحل :

ميل الخط ا لمستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\frac{\text{ـ ٣ ـ (ـ٥)}}{\text{٠ ـ (ـ١)}}$ = $\frac{\text{ـ ٣ +٥}}{\text{١}}$ = ٢

ميل الخط ا لمستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ = $\frac{\text{١ ـ (ـ ٣)}}{\text{٢ ـ ٠}}$ = $\frac{\text{١ +٣}}{\text{٢}}$ = ٢

A المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ يشتركان في النقطة ب ولها نفس الميل

B $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ هما نفس المستقيم .

B أ ، ب ، حـ تنتمي لنفس الخط المستقيم .

مثال٣ : إذا كان ا لمستقيم الذي يمر بالنقط (٣، ـ ١) ، (س ، ١) ، (ـ ٤ ، ص) ميله = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ أوجد قيمة س ، ص

ا لحل : A ميل المستقيم المار بالنقطتين الأولى والثانية = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

B $\frac{\text{١ + ١}}{\text{س ـ٣}}$ = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ ، ٢(س ـ ٣) = ٢×٣

B س ـ ٣ = ٣ B س = ٦

A الميل = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ B $\frac{\text{ص ـ (- ١)}}{\text{ـ ٤ ـ ٣}}$ = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ B $\frac{\text{ص+ ١}}{\text{ـ ٧}}$ = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

B ٣ ص + ٣ = ـ ١٤ B ٣ ص = ـ ١٤ ـ ٣ B ٣ ص = ـ ١٧

B ص = $\frac{\text{ـ ١٧}}{\text{٣}}$

إعداد / خالد المنفلوطى Tell/ 0106522138 Email/elmnfalty26@yahoo.com

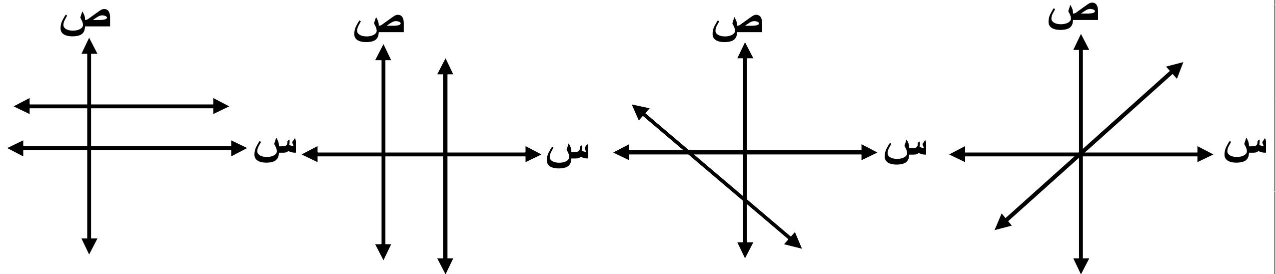
سأال للتفكير

(١) إذا كان المستقيم الذي يحوي النقطتين (١، ـ٣) ، (س، ٥) ، ميله= ٢ فأوجد قيمة س .

(٢) أثبت أن النقط (ـ ٢،١٢) ، (٢، ٤) ، (٦ ، ـ٤) تنتمي لنفس المستقيم

(٣) إذا كانت النقط (ـ ٢، ١٢) ، (٦ ، ـ ٤) ، (٢ ، ص) تقع علي نفس المستقيم فأوجد قيمة ص .

(٤) صنف ميل ا لمستقيم في كل من الأشكال الآتية بأنه :
(موجب ـ سالب ـ صفر ـ غير معرف)



(٥) أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ(- ١ ، ٣) ، ب(٢ ، ٥)
، هل جـ (٨ ، ١) g $\overleftrightarrow{أب}$

تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم

ملحوظة :

ا لتطبيقات تعتمد علي وجود متغيرين (س ، ص) مثلا يرتبطان معاً بعلاقة خطية ص = أ س + ب حيث

أ = ا لميل = $\frac{\text{ا لتغير في ص}}{\text{ا لتغير في س}}$ = متوسط تغير ص بالنسبة إلي س

إعداد / خالد المنفلوطى Tell/ 0106522138 Email/elmnfalty26@yahoo.com

تطبيق السرعة المنتظمة :

الجسم يتحرك في خط مستقيم و يقطع مسافات متساوية في أزمنة متساوية

المسافة = السرعة × الزمن B ف = ع ن

السرعة ا لمنتظمة (ع) = متوسط تغير المسافة (ف) بالنسبة للزمن (ن)

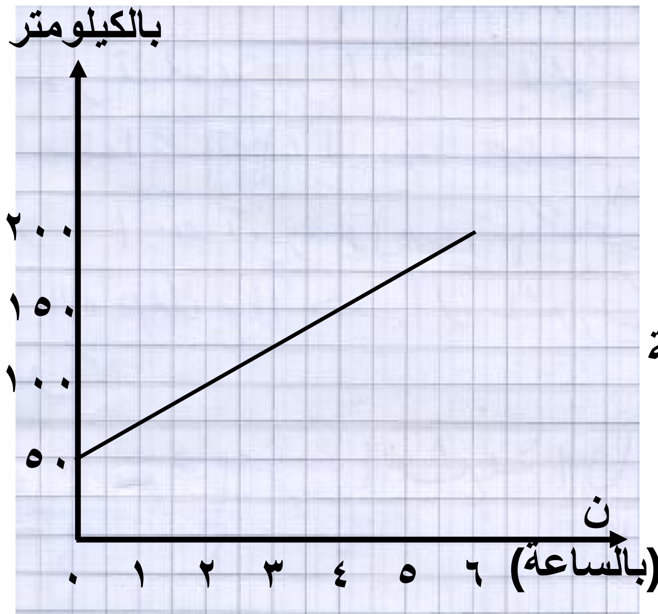
= ميل ا لخط المستقيم ا لذي يمثل العلاقة بين ف ، ن

أي أن : ع = $\frac{ف_٢ - ف_١}{ن_٢ - ن_١}$

ومن ذلك فأن العلاقة بين ف ، ن في حالة الحركة ذات السرعة المنتظمة تكون علي ا لصورة : ف = ع ن + ب

مثال : ا لشكل ا لمقابل :

يمثل حركة سيارة تسير بسرعة منتظمة أوجد سرعة السيارة



الحل :

سرعة سيارة = $\frac{ف_٢ - ف_١}{ن_٢ - ن_١}$

= $\frac{٢٠٠ - ٥٠}{٦ - ٠}$

= $\frac{١٥٠}{٦}$ = ٢٥ كم/ ساعة

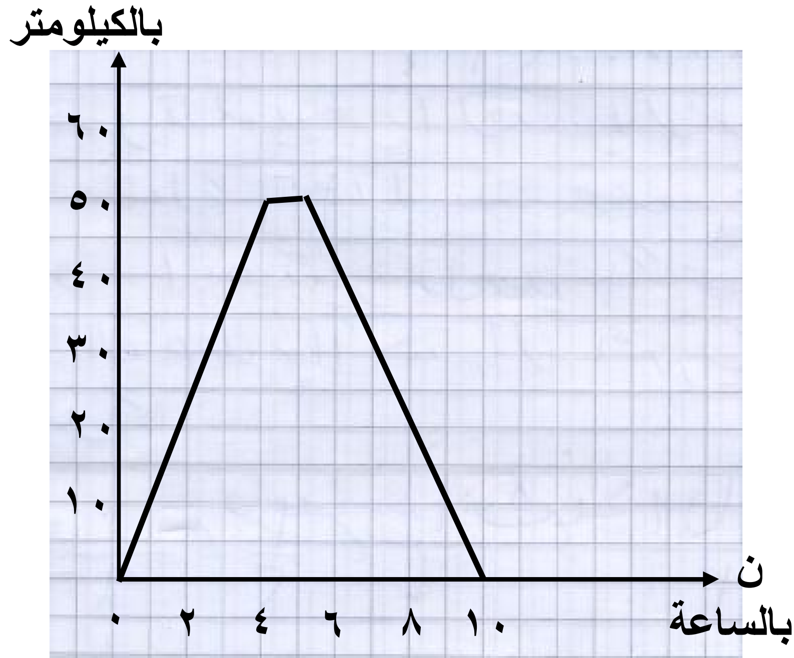
مثال : ا لشكل ا لمقابل : يمثل حركة راكب دارجة يسير بسرعة منتظمة أوجد :

(١) سرعته خلال الساعات الأربع الأولي

(٢) سرعته خلال الساعات الخمس الأخيرة

إعداد / خالد المنفلوطى Tell/ 0106522138 Email/elmnfalty26@yahoo.com

(٣) بماذا تفسر القطعة المستقيمة الأفقية في الشكل المقابل



الحل :

(١) ع (خلال الساعات الأربع الأولى) $= \frac{50 - 0}{4 - 0} =$ ١٢,٥ كم / ساعة

(٢) ع (خلال الساعات الخمس الأخيرة) $= \frac{0 - 50}{10 - 5} = \frac{-50}{5} = -10$ كم/ساعة

[الإشارة السالبة تعني أن راكب الدارجة تحرك في عكس اتجاه حركته الأولى بسرعة ١٠ كم / ساعة]

(٣) القطعة المستقيمة الأفقية تبين أن راكب الدارجة توقفا لمدة ساعة بعد أن سار مسافة ٥٠ كم ثم سار بعد ذلك راجعاً إلي نقطة ا لبدء

مثال : خزان مياه بأسفله صنبور مفتوح والشكل المقابل يمثل العلاقة بين (ن) بالدقائق و كمية المياه المتبقية في الخزان (ح) باللترات .

(١) استخدم الشكل في إيجاد العلاقة بين ح ، ن

(٢) ماهي أكبر سعة للخزان ؟

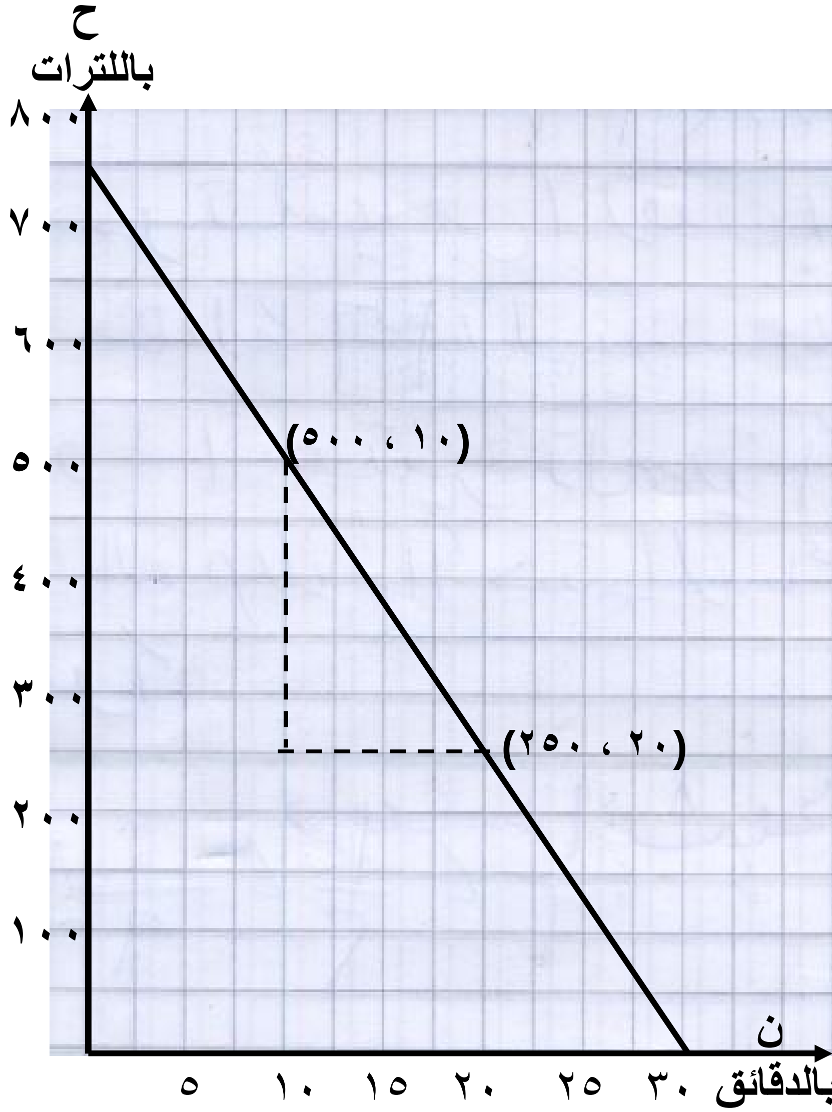
(٣) ماهو الزمن اللازم ليفرغ الخزان ؟

(٤) كم يتبقى في الخزان بعد ٢٠ دقيقة

(٥) ماهو متوسط تفريغ الخزان ؟

إعداد / خالد المنفلوطى Tell/ 0106522138 Email/elmnfalty26@yahoo.com

الحل :



(١) ا لعلاقة بين ح ، ن خطية علي ا لصورة : ح = أ ن + ب

حيث أ = الميل = $\frac{٢٥٠ - ٥٠٠}{٢٠ - ١٠}$ = ـ ٢٥

، ب الجزء المقطوع من محور ح = ٧٥٠

ا لعلاقة بين ح ، ن علي ا لصورة : ح = ـ ٢٥ ن + ٧٥٠

(٢) أكبر سعة للخزان وهي : ح عندما ن = ٠ و هي ٧٥٠ لتراً

إعداد / خالد المنفلوطى Tell/ 0106522138 Email/elmnfalty26@yahoo.com

(٣) ا لزمن اللازم لتفريغ ا لخزان هو : ن عندما ح = ٠ و هو ٣٠ دقيقة

(٤) بعد ٢٠ دقيقة ا لمتبقي في ا لخزان هو : ح عندما ن = ٢٠ وهو ٢٥٠ لتراً

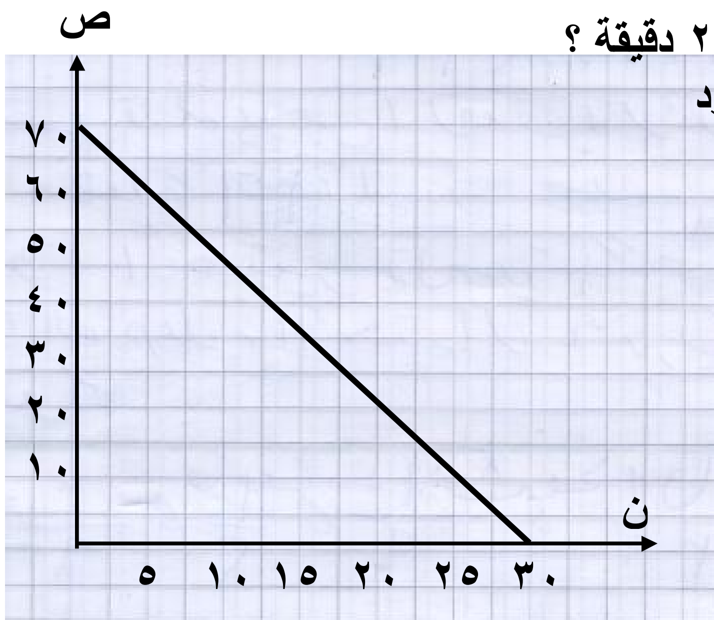
(٥) متوسط تفريغ ا لخزان و هو : ميل ا لمستقيم = ٢٥ لتر / دقيقة

سؤال للتفكير

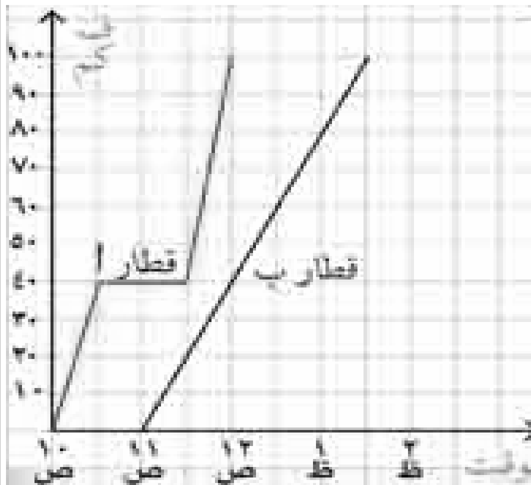
(١) أثناء قراءة محمد كتاب وجد أ نه بعد قراءة ٢٠ دقيقة تبقي له ٣٥ صفحة وبعد أن قرأ ٦٠ دقيقة تبقي ٥ صفحات فإذا فرضنا أن العلاقة بين الزمن (ن) ، وعدد ا لصفحات ا لباقية (ص) علاقة خطية .
١-مثل ا لعلاقة بين ن ، ص بيانيا ثم أكتب ا لعلاقة ا لجبرية بينهما .
٢- من ا لرسم أوجد : متي ينتهي محمد من قراءة ا لكتاب ؟
٣-كم عدد صفحات ا لكتاب ا لمتبقية عندما بدء ا لقراءة

---

(٢) ملأ محمد سيارته بالوقود فى الشكل المقابل يمثل العلاقة بين الزمن (ن) بالدقائق وكمية الوقود المتبقية (ص) باللتر
(أ) استخدم ا لشكل في إيجاد العلاقة بين ص ، ن
(ب) ما هي أكبر سعة للخزان ؟
(جـ) متي يفرغ الوقود ؟
(د) كم يتبقى من الوقود بعد ٢٠ دقيقة ؟
(هـ) ما متوسط استهلاك الوقود



إعداد / خالد المنفلوطى Tell/ 0106522138 Email/elmnfalty26@yahoo.com



(٣) الشكلُ المقابلُ يوضّحُ العلاقةَ بينَ المسافةِ ف، والزمنِ ن لحركةِ قطارينِ أ، ب بينَ محطتينِ، حيثُ ف (بالكيلو متر)، ن (بالساعة) استخدمِ الرسمَ لإيجادِ قيمةِ:

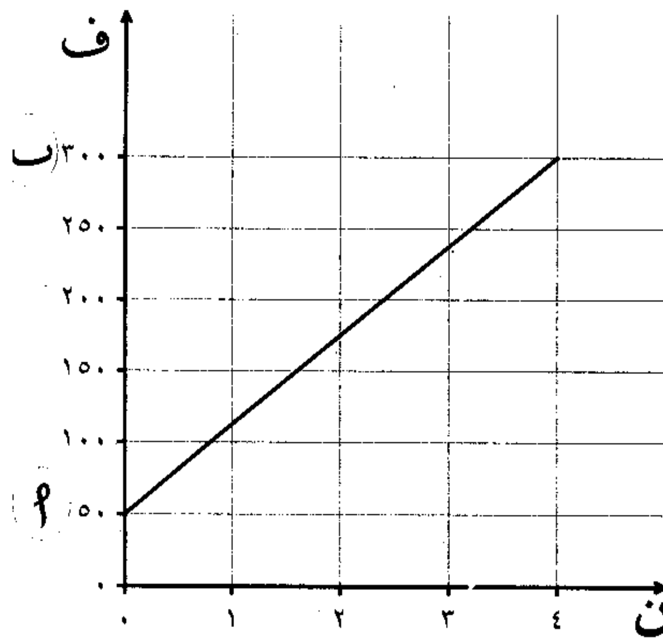
أ البعدِ بينَ المحطتينِ.

ب الزمنِ الذى استغرقه كلٌّ من القطارينِ.

جـ السرعةِ المتوسطةِ لكلٍّ منهما.

د ما دلالةُ القطعةِ المستقيمةِ في حركةِ القطارِ أ.

ملحوظة : السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{الزمن الكلي الذي قطعت فيه المسافة}}$



(٤) تحرك محمد بسيارته بين المدينتين أ ، ب والشكل البياني المقابل يوضح العلاقة بين المسافة (ف) بالكيلومتر والزمن (ن) بالساعة لسيارة محمد.

(أ) ما مقدار السرعة المنتظمة لسيارة محمد.

(ب) اكتب العلاقة بين ف ، ن.

(حـ) أوجد المسافة التي تقطعها سيارة محمد في ساعتين.

---

(٥) تحركت دراجة بخارية فوجد أنها بعد دقيقة واحدة أصبحت على بعد ١ كم من نقطة معينة أ وبعد ٣ دقائق أصبحت على بعد ٥ كم من نفس النقطة. ارسم شكلاً بيانيا يمثل هذه الحركة. ومن الرسم أوجد:

(١) سرعة الدراجة

(٢) بعد نقطة البداية للدراجة عن نقطة أ

إعداد / خالد المنفلوطى Tell/ 0106522138 Email/elmnfalty26@yahoo.com